LECCIÓN
CONDENSADA

12.1

Aleatoriedad y probabilidad

En esta lección

- Simularás unos **procesos aleatorios** con tu calculadora
- Encontrarás unas **probabilidades experimentales** basadas en los resultados de un gran número de ensayos
- Calcularás unas **probabilidades teóricas** mediante el conteo de los resultados y el uso de un modelo de áreas

Lanzar un dado, echar una moneda al aire, y echar suertes son ejemplos de **procesos aleatorios** (*random processes*). En un proceso aleatorio, no se puede predecir ningún resultado individual, a pesar de que, a menudo, el patrón a largo plazo de muchos resultados individuales es predecible.

Investigación: Lanza una moneda

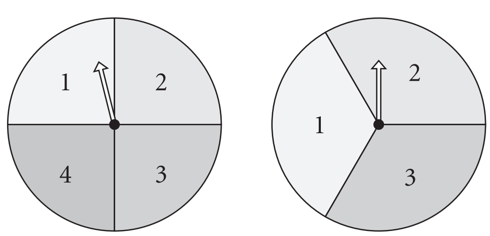
Lee la investigación en tu libro, y después completa los Pasos 1 a 3.

Si es posible, obtén de algún compañero tuyo los resultados de tu grupo correspondientes a los Pasos 4 y 5, y examínalos meticulosamente. Si no tienes acceso a los resultados de tu grupo, lanza tu propia moneda para generar al menos cinco secuencias más, de diez lanzamientos cada una, antes de completar el Paso 6.

También puedes usar un proceso aleatorio, como el lanzamiento de dados, para generar unos **números aleatorios.** A largo plazo, cada número tiene la misma probabilidad de presentarse, y no existe ningún patrón en ninguna sucesión de números aleatorios. Puedes usar tu calculadora para generar muchos números aleatorios rápidamente. (Consulta **Calculator Note 1L** para aprender cómo generar números aleatorios.)

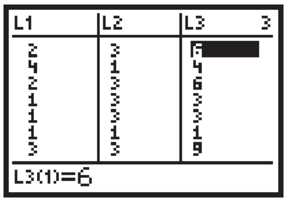
El Ejemplo A en tu libro muestra cómo usar el generador de números aleatorios de tu calculadora para **simular** el lanzamiento de dos dados. Los lanzamientos simulados se utilizan entonces para hallar la probabilidad de lanzar una suma de 6. Lee ese ejemplo atentamente. Después lee el ejemplo siguiente.

EJEMPLO A Usa el generador de números aleatorios de una calculadora para hallar la probabilidad de obtener un producto impar con estas dos ruletas justas.

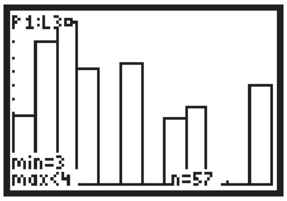


(continúa)

► ***Solución***



Simula 300 lanzamientos de la primera ruleta mediante la generación de 300 enteros aleatorios de 1 a 4; almacénalos en la lista L_1. Simula 300 lanzamientos de la segunda ruleta mediante la generación de 300 enteros aleatorios de 1 a 3; almacénalos en la lista L_2. Define la lista L_3 como el producto de las listas L_1 y L_2. El histograma muestra los 300 productos.



[1, 13, 1, 0, 60, 5]

Los posibles productos impares son 1, 3, y 9. Al sumar las alturas de columna de estos productos, se obtiene $24 + 57 + 27$, ó 108. Entonces, de los 300 lanzamientos simulados, 108 tienen un producto impar. Por tanto, $P(\text{producto impar}) = \frac{108}{300} = .36$.

Lo que se obtiene en un proceso aleatorio se llama los **resultados** (*outcomes*). Un **evento** es un conjunto de resultados deseados. La probabilidad de un evento está siempre entre 0 y 1. La probabilidad de un evento que se presenta siempre es 1. La probabilidad de un evento imposible es 0.

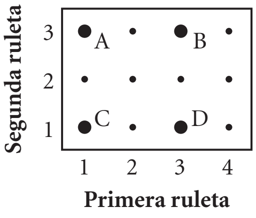
Las probabilidades basadas en ensayos y observaciones, tales como las probabilidades que se encuentran en el Ejemplo A en tu libro y en el Ejemplo A de esta lección, se llaman las **probabilidades experimentales.** Generalmente, cuantos más ensayos se tengan para obtener una probabilidad experimental, mejor será ésta para predecir un comportamiento.

En ocasiones, es posible encontrar la **probabilidad teórica** de un evento, sin realizar un experimento. Para hallar la probabilidad teórica, cuenta el número de maneras en que un evento deseado puede ocurrir y divídelo entre el número total de resultados igualmente posibles. (Los resultados que son "igualmente posibles" tienen la misma oportunidad de ocurrir.)

En el recuadro en la página 659 en tu libro, se dan las fórmulas para calcular las probabilidades experimentales y teóricas. Lee el recuadro, el texto que le sigue, y el Ejemplo B, que muestra cómo hallar la probabilidad teórica de obtener una suma de 6 al lanzar un par de dados. Luego lee el ejemplo siguiente.

EJEMPLO B Encuentra la probabilidad teórica de obtener un producto impar con las ruletas ilustradas en el Ejemplo A.

► ***Solución***



Los resultados igualmente posibles que se obtienen cuando haces girar la manecilla de la ruleta se representan por los 12 puntos de la cuadrícula del diagrama a continuación.

Los cuatro resultados posibles con un producto impar están rotulados con las letras A–D. El punto B, por ejemplo, representa un resultado de 3 en la primera ruleta y un resultado de 3 en la segunda, para obtener un producto de 9.

La probabilidad teórica es el número de maneras en que puede ocurrir el evento (en este caso, un producto impar), dividido entre el número de resultados igualmente posibles. Por tanto, $P(\text{producto impar}) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3} = .\overline{3}$, ó $33\frac{1}{3}\%$. Éste es un poco menor que la probabilidad experimental hallada en el Ejemplo A. Observa que, aunque la probabilidad experimental puede variar, la probabilidad teórica es un valor fijo.

En el Ejemplo C en tu libro, los resultados no se limitan a enteros. En este caso, no puedes simplemente contar los posibles resultados. En vez de ello, la solución implica un modelo de áreas. Lee ese ejemplo atentamente. La probabilidad que se encuentra al calcular la razón entre las longitudes o áreas se llama la **probabilidad geométrica.**

LECCIÓN CONDENSADA

12.2

Conteo de resultados y diagramas de árbol

En esta lección

- Usarás unos **diagramas de árbol** para contar los resultados y para hallar las probabilidades de **eventos compuestos**
- Calcularás las probabilidades de los **eventos independientes** y de los **eventos dependientes**
- Aprenderás la **regla de la multiplicación** para hallar la probabilidad de una secuencia de eventos

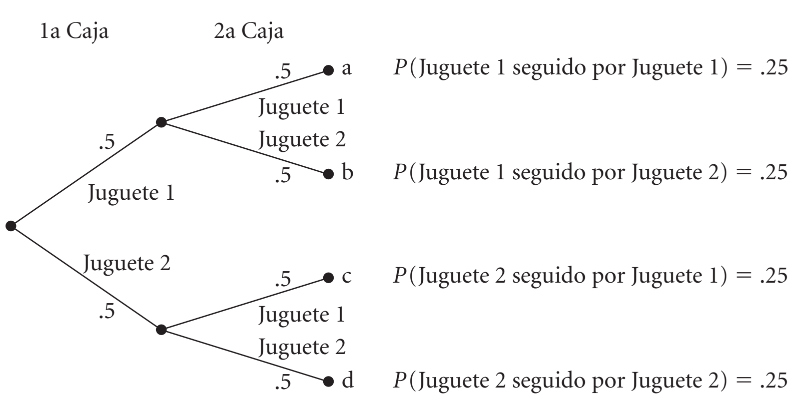
Cuando se determina la probabilidad teórica de un evento, puede resultar difícil contar los resultados. El Ejemplo A en tu libro ilustra cómo construir un **diagrama de árbol** puede ayudarte a organizar la información. Lee ese ejemplo y asegúrate de entenderlo.

En el diagrama de árbol del Ejemplo A, cada rama representa un **evento simple.** Una secuencia de eventos simples, representada por una trayectoria, se llama un **evento compuesto.**

Investigación: La regla de la multiplicación

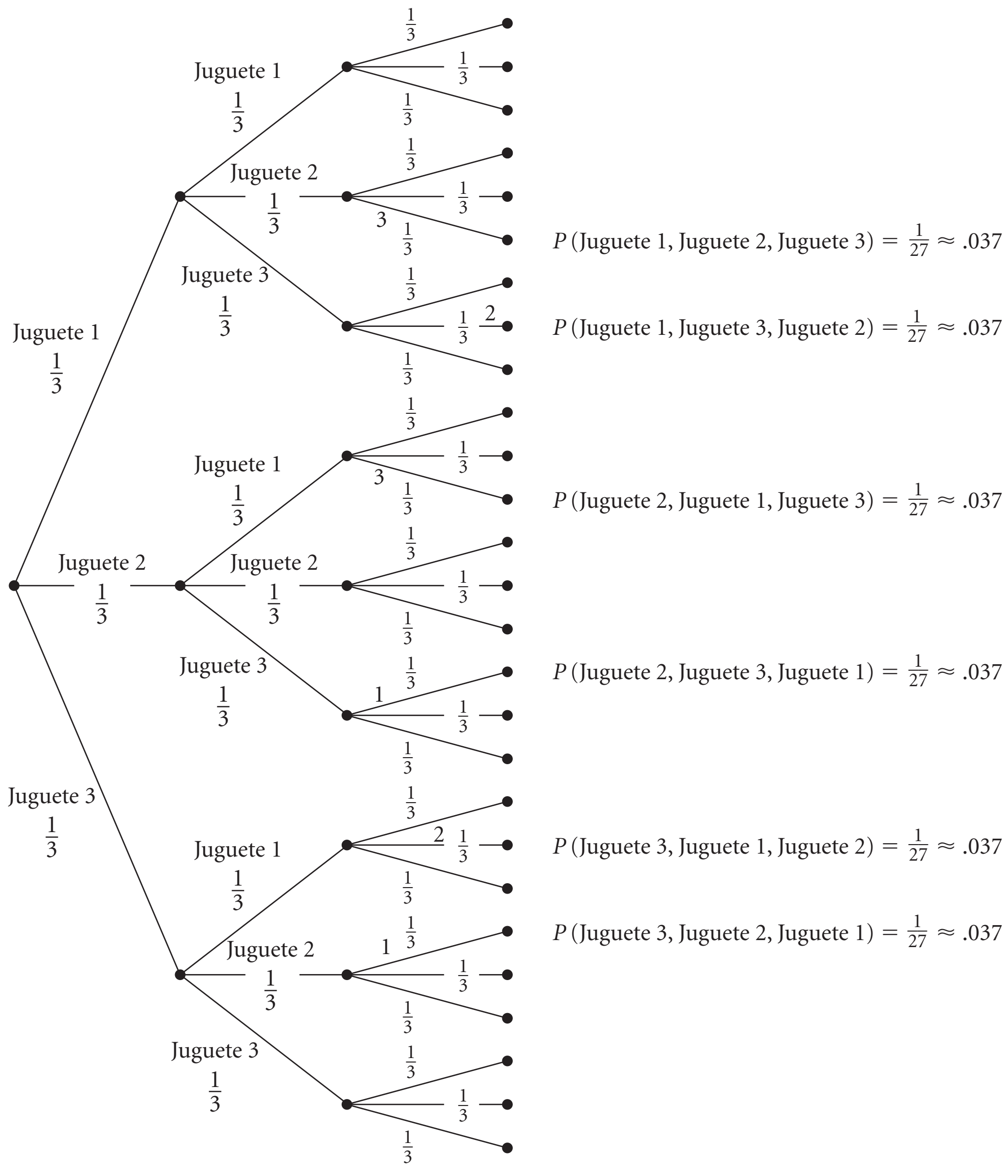
Trabaja la investigación en tu libro, y después compara tus resultados con los siguientes.

Paso 1 A continuación se muestra el diagrama de árbol del Ejemplo A, parte a, rotulado con unas probabilidades. La probabilidad de cada evento simple (obtener un juguete específico de una caja) es .5. Debido a que hay cuatro trayectorias igualmente posibles, la probabilidad de cualquiera de ellas es $\frac{1}{4}$, ó .25. Observa que la probabilidad de una trayectoria es el producto de las probabilidades de sus ramas.



Paso 2 A continuación se muestra el diagrama de árbol del Ejemplo A, parte b, rotulado con las probabilidades. Observa de nuevo que la probabilidad de cada trayectoria es el producto de las probabilidades de sus ramas. La suma de las probabilidades de todas las trayectorias es 1. La suma de las probabilidades de las seis trayectorias resultadas es $6\left(\frac{1}{27}\right)$, ó $\frac{6}{27}$.

(continúa)



Paso 3

a. Si hubiera cuatro juguetes diferentes, distribuidos uniformemente entre las cajas, entonces la probabilidad de encontrar cualquier juguete específico en una caja específico sería .25.

b. La probabilidad de que Talya encuentre un juguete específico en una caja *no* influye a la probabilidad de que ella encuentre un juguete específico en la siguiente caja.

c. Existen 4^4, ó 256 diferentes resultados igualmente posibles. El resultado (Juguete 3, seguido por Juguete 2, seguido por Juguete 4, seguido por Juguete 1) es uno de tales resultados, de modo que su probabilidad es $\frac{1}{256}$, ó aproximadamente .004. También puedes llegar a esta conclusión dándote cuenta que un diagrama de árbol completo tendría 256 trayectorias y que la probabilidad en cada una de ellas es .25. El resultado especificado es una trayectoria con cuatro ramas, así pues, su probabilidad es (.25)(.25)(.25)(.25), ó aproximadamente .004.

(continúa)

Paso 4 Para hallar la probabilidad de una trayectoria, multiplica las probabilidades de sus ramas.

Paso 5 Existen 24 trayectorias que incluyen los cuatro juguetes. (Para que una sucesión tenga cuatro juguetes diferentes, hay 4 posibilidades para el primer juguete, 3 posibilidades para el segundo, 2 posibilidades para el tercero, y 1 posibilidad para el cuarto. Hay $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ de tales secuencias.) Entonces, la probabilidad de obtener un conjunto completo es $\frac{24}{256}$, ó aproximadamente .094.

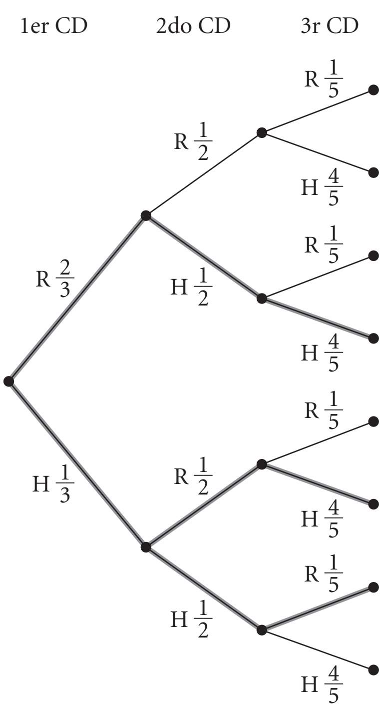
En el Ejemplo B en tu libro, sería demasiado intentar dibujar un diagrama de árbol en el que se mostrara cada resultado posible. Dicho ejemplo ilustra cómo, en estos casos, a menudo puedes hacer un diagrama de árbol con trayectorias de diferentes posibilidades. Lee ese ejemplo atentamente. A continuación hay otro ejemplo.

EJEMPLO A

Zak trabaja como *disk jockey* en una fiesta. Para empezar la fiesta, pone tres CDs en su reproductor de CDs. En el Disco 1 hay 8 canciones de rock y cuatro de hip-hop. En el Disco 2 hay 5 canciones de rock y 5 de hip-hop. En el Disco 3 hay 3 de rock y 12 de hip-hop. Si Zak selecciona al azar 1 canción del Disco 1, después 1 del Disco 2, y luego 1 del Disco 3, ¿cuál es la probabilidad de que ponga exactamente 2 canciones de hip-hop?

► Solución

Existen dos ramas para cada CD, una para las canciones de rock y otra para las de hip-hop. Cada rama está rotulada con su probabilidad. Las trayectorias resaltadas son aquellas en las que se incluyen exactamente dos canciones de hip-hop.



(continúa)

Encuentra la probabilidad de cada trayectoria, multiplicando las probabilidades de sus ramas.

$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{15}$ $\quad \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{30}$ $\quad \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{30}$

Ahora, suma las probabilidades de las tres trayectorias.

$P(\text{exactamente 2 canciones de hip-hop}) = \frac{4}{15} + \frac{4}{30} + \frac{1}{30} = \frac{13}{30} \approx .43$

En el ejemplo anterior, la probabilidad de que Zak toque una canción de rock del Disco 2 es la misma, sin importar si toca una canción de rock del Disco 1. Estos eventos se llaman **independientes,** lo que significa que la ocurrencia de uno no tiene influencia en la ocurrencia del otro. Para hallar la probabilidad de una secuencia de eventos independientes, simplemente multiplica las probabilidades de los eventos. Esto se resume en el recuadro en la página 671 de tu libro.

En la parte b del Ejemplo C de tu libro, los eventos no son independientes. Lee el Ejemplo C atentamente, y asegúrate de entenderlo. He aquí un ejemplo similar.

EJEMPLO B En el Ejemplo A anterior, supón que el anfitrión de la fiesta le pide a Zak que no toque dos canciones de rock seguidas. ¿Cuál es la probabilidad de que Zak toque una canción de rock del Disco 2?

► ***Solución*** Si Zak toca una canción de rock del Disco 1, entonces $P(\text{canción de rock del Disco 2}) = 0$ porque no puede tocar dos canciones de rock seguidas. Si toca una canción de hip-hop del Disco 1, entonces $P(\text{canción de rock del Disco 2}) = \frac{1}{2}$. Hay una probabilidad de $\frac{1}{3}$ de que toque una canción de hip-hop del Disco 1, de modo que la probabilidad de que toque una canción de rock del Disco 2 es $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}$, ó $\frac{1}{6}$.

Cuando la probabilidad de un evento depende de la ocurrencia de otro, se dice que los eventos son **dependientes.** Los eventos independientes y dependientes se pueden describir usando la **probabilidad condicional.** Si el evento A depende del evento B, entonces la probabilidad de que A ocurra, dado que B ha ocurrido, es diferente de la probabilidad de que A ocurra solo. La probabilidad de A dado B se escribe como $P(A|B)$. Si A y B son dependientes, entonces $P(A|B) \neq P(A)$. Si A y B son independientes, entonces $P(A|B) = P(A)$.

En el Ejemplo A, los eventos (rock en el Disco 2) y (hip-hop en el Disco 1) son *independientes,* de modo que

$$P(\text{rock en el Disco 2} \mid \text{hip-hop en el Disco 1}) = P(\text{rock en el Disco 2})$$

En el Ejemplo B, los eventos (rock en el Disco 2) y (hip-hop en el Disco 1) son *dependientes,* de modo que

$$P(\text{rock en el Disco 2} \mid \text{hip-hop en el Disco 1}) \neq P(\text{rock en el Disco 2})$$

En la página 672 en tu libro, se explica cómo puedes usar los diagramas de árbol para separar los eventos dependientes, convirtiéndolos en eventos independientes. Lee ese texto atentamente, y luego intenta hacer un diagrama parecido para la situación del Ejemplo B anterior. Después, lee la regla de la multiplicación.

LECCIÓN CONDENSADA 12.3

Eventos mutuamente excluyentes y diagramas de Venn

En esta lección

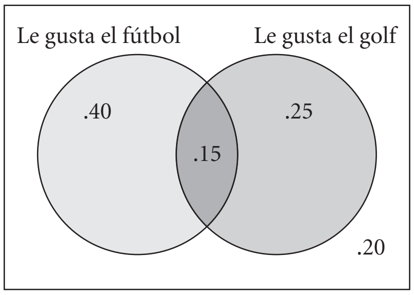
- Aprenderás la **regla de la suma para eventos mutuamente excluyentes**
- Descubrirás la **regla general de la adición**
- Usarás un **diagrama de Venn** para separar eventos que no son mutuamente excluyentes y convertirlos en eventos mutuamente excluyentes

Dos eventos que no pueden ocurrir al mismo tiempo son mutuamente excluyentes. Por ejemplo, aprobar el examen semestral de historia y reprobar el examen semestral de historia son mutuamente excluyentes, pues no puedes hacer ambas cosas.

En la Lección 12.2, viste como un diagrama de árbol te permite separar una secuencia de eventos dependientes, convertiéndola en una secuencia de eventos independientes. Igualmente, puedes usar un **diagrama de Venn** para separar los eventos que no son mutuamente excluyentes y convertirlos en eventos mutuamente excluyentes. He aquí un ejemplo.

EJEMPLO

Audrey preguntó a una muestra de estudiantes de su escuela si les gusta el fútbol americano y si les gusta el golf. Estos eventos no son mutuamente excluyentes, porque es posible que a alguien le gusten ambos deportes. Basándose en sus resultados, Audrey construyó este diagrama de Venn de probabilidades:



a. ¿Cuál es el significado de la región rotulada con .20? ¿De la región rotulada con .15?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que a un estudiante seleccionado al azar le guste el golf?

c. ¿Cuál es la probabilidad de que a un estudiante seleccionado al azar le guste el fútbol y no le guste el golf?

► ***Solución***

a. La región señalada con .20 representa la probabilidad de que a un estudiante no le guste ni el fútbol y ni el golf. La región señalada con .15 representa la probabilidad de que a un estudiante le gusten ambos deportes.

b. Suma las probabilidades que están dentro del círculo “Le gusta el golf”: $.25 + .15 = .40$.

c. Esta probabilidad se representa por la región que está dentro del círculo “Le gusta el fútbol”, pero fuera del círculo “Le gusta el golf”. La probabilidad es .40.

(continúa)

Lección 12.3 • Eventos mutuamente excluyentes y diagramas de Venn (continuación)

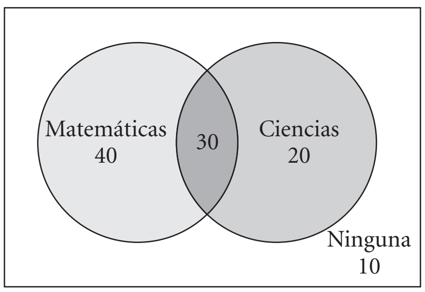
El Ejemplo A en tu libro ofrece una situación un poco más complicada que implica tres eventos. Lee ese ejemplo atentamente. Después lee la regla de la suma para los eventos mutuamente excluyentes, en la página 680. En la investigación descubrirás cómo se puede generalizar la regla a los eventos que quizás no sean mutuamente excluyentes.

Investigación: Regla de la adición

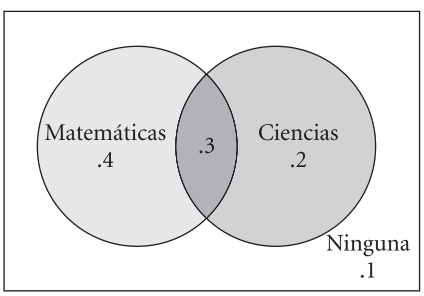
Trabaja los Pasos 1–5 de la investigación en tu libro. Después compara tus resultados con los siguientes.

Paso 1 Los eventos no son mutuamente excluyentes porque un estudiante puede estudiar tanto las matemáticas cómo las ciencias.

Paso 2



Paso 3



Paso 4 En la suma $P(\text{M}) + P(\text{S})$ se cuenta la intersección dos veces.

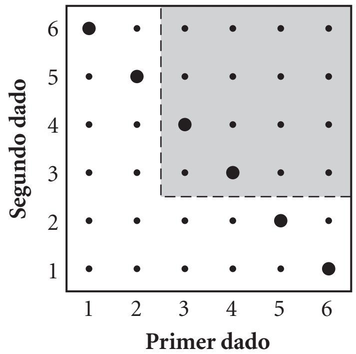
Paso 5 Debido a que al sumar $P(\text{M})$ y $P(\text{S})$ se cuenta la intersección dos veces, necesitas restar la intersección una vez. Por tanto,

$$P(\text{M ó S}) = P(\text{M}) + P(\text{S}) - P(\text{M y S})$$

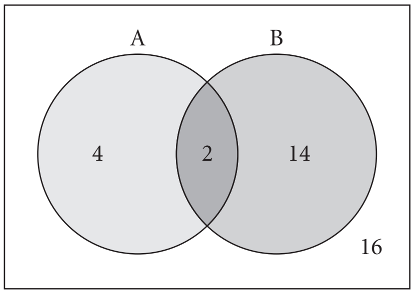
(continúa)

Lección 12.3 • Eventos mutuamente excluyentes y diagramas de Venn (continuación)

Paso 6 Supón que se lanzan dos dados. Sea A = "suma es 7" y B = "ambos dados > 2". En el diagrama siguiente, los puntos más grandes representan lanzamientos en el evento A y los puntos en la región sombreada representan lanzamientos en el evento B.



Este diagrama de Venn muestra cómo se distribuyen los 36 lanzamientos posibles.



Usa esta información para encontrar las probabilidades de las partes a–f del Paso 6 en tu libro. Después compara tus resultados con los siguientes.

a. $P(\text{A}) = \frac{6}{36} \approx .167$

b. $P(\text{B}) = \frac{16}{36} \approx .444$

c. $P(\text{A y B}) = \frac{2}{36} \approx .056$

d. $P(\text{A ó B}) = \frac{20}{36} \approx .556$

e. $P(\text{no A y no B}) = \frac{16}{36} \approx .444$

f. $P(\text{A ó B}) = P(\text{A}) + P(\text{B}) - P(\text{A y B}) = \frac{6}{36} + \frac{16}{36} - \frac{2}{36} = \frac{20}{36} \approx .556$

Paso 7 $P(\text{A ó B}) = P(\text{A}) + P(\text{B}) - P(\text{A y B})$

En el recuadro en la página 682 de tu libro, se resume la regla general de la adición. Para practicar el uso de la regla, resuelve el problema en el Ejemplo B en tu libro.

Dos eventos que son mutuamente excluyentes y que conforman todos los resultados posibles se llaman **complementos.** En general, el complemento de un evento A es (no A), y $P(\text{A}) + P(\text{no A}) = 1$.

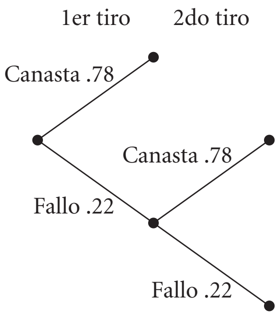
En el Ejemplo C puedes practicar con todas las nuevas ideas de esta lección. Intenta resolver ambas partes del problema, antes de leer la solución.

LECCIÓN CONDENSADA 12.4

Variables aleatorias y valor esperado

En esta lección

- Aprenderás el significado de **variable aleatoria, variable aleatoria geométrica,** y **variable aleatoria discreta**
- Calcularás el **valor esperado** de una variable aleatoria



Al final de una práctica de basquetbol, el entrenador les comunica a los jugadores que se pueden ir a casa en cuanto marquen un tiro libre. Kate marca el 78% de sus tiros libres. ¿Qué probabilidad tiene Kate de poder irse a casa después de solamente uno o dos tiros libres?

La probabilidad de que Kate marque en su primer tiro es .78. El diagrama, muestra que la probabilidad de que ella falle en su primer tiro y marque en el segundo es (.22)(.78), ó .1716. Para hallar la probabilidad de que pueda irse a casa después de solamente uno o dos tiros, suma las probabilidades de los dos eventos mutuamente excluyentes: $.78 + .1716 = .9516$. La probabilidad es de aproximadamente 95%.

La probabilidad de éxito de un evento (en este caso, hacer una canasta) a menudo se utiliza para predecir el número de ensayos independientes antes de que se logre el primer éxito.

Investigación: Los dados que dan un cuatro

Completa la investigación por tu cuenta y después compara tus resultados con los siguientes. Si no tienes los datos de tu grupo correspondientes al Paso 1, realiza 20 ensayos por tu cuenta y encuentra la media.

Paso 1 Los resultados variarán, pero el número medio de lanzamientos debe ser aproximadamente 6.

Paso 2 Basándote en el experimento del Paso 1, esperarías que saliera un 4 en el sexto lanzamiento.

Paso 3 En esta secuencia "perfecta", se obtiene un 4 cada seis lanzamientos.

Paso 4 La probabilidad de éxito en cualquier lanzamiento es $\frac{1}{6}$ y la probabilidad de fracaso es $\frac{5}{6}$. Por tanto,

$$P(\text{obtener el primer 4 en el 1er lanzamiento}) = \frac{1}{6} \approx .167$$

$$P(\text{obtener el primer 4 en el 2do lanzamiento}) = \left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{5}{6^2} = \frac{5}{36} \approx .139$$

$$P(\text{obtener el primer 4 en el 3er lanzamiento}) = \left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{5^2}{6^3} = \frac{25}{216} \approx .116$$

$$P(\text{obtener el primer 4 en el 4to lanzamiento}) = \left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{5^3}{6^4} = \frac{125}{1296} \approx .096$$

Paso 5 Usando el patrón del Paso 4, $P(\text{obtener el primer 4 en el enésimo lanzamiento}) = \frac{5^{n-1}}{6^n}$.

Paso 6 La suma debe ser aproximadamente 6. Éste es el promedio del número de lanzamientos que se necesitarán para obtener un 4.

Paso 7 La suma que encontraste en el Paso 6 debe acercarse a tus estimaciones de los Pasos 2 y 3.

(continúa)

Lección 12.4 • Variables aleatorias y valor esperado (continuación)

Una **variable aleatoria** es una variable numérica cuyo valor depende del resultado de un experimento aleatorio. En la investigación, la variable aleatoria es el número de lanzamientos efectuados antes de obtener un 4 en un dado. El valor promedio que hallaste en los Pasos 2, 3, y 6 es el **valor esperado** de esta variable aleatoria. También se llama el valor a largo plazo o valor medio.

La variable aleatoria de la investigación es una **variable aleatoria discreta** porque sus valores son enteros. También se llama la **variable aleatoria geométrica,** lo cual significa que es un conteo del número de ensayos hechos antes de que suceda algo (un éxito o un fracaso).

En el Ejemplo A en tu libro, la variable aleatoria es la suma del resultado del lanzamiento de dos dados. Esta variable aleatoria *no* es geométrica. Lee el Ejemplo A atentamente, y asegúrate de que lo entiendes. La solución de la parte b muestra que, para hallar el valor esperado, multiplicas cada valor posible de la variable aleatoria por la probabilidad de que ocurra, y después sumas los resultados. Esto se resume en el recuadro "Expected Value" (valor esperado) en la página 689 de tu libro.

Observa que la variable aleatoria en la investigación tiene un número infinito de valores posibles (teóricamente, el primer 4 podría ocurrir en cualquier lanzamiento), de modo que el valor esperado es la suma de una serie, $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \frac{5^{n-1}}{6^n}$. El valor que encontraste en el Paso 6 de la investigación fue una estimación del valor esperado. (Fue la suma de los primeros 100 términos.)

En el Ejemplo B en tu libro, se muestra que incluso si la variable aleatoria es discreta, es posible que su valor esperado no sea un entero. Lee ese ejemplo, y después lee el ejemplo siguiente.

EJEMPLO Cuando se lanzan dos dados no cargados, el producto de los resultados varía. ¿Cuál es el valor esperado del producto?

▶ ***Solución*** La variable aleatoria x tiene como valores todos los posibles productos del resultado de lanzar dos dados. He aquí los valores posibles y la probabilidad de cada uno. (Asegúrate de entender cómo se determinaron las probabilidades.)

Resultado x	1	2	3	4	5	6	8	9	10
Probabilidad $P(x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$

Resultado x	12	15	16	18	20	24	25	30	36
Probabilidad $P(x)$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

El valor esperado es

$$1\left(\frac{1}{36}\right) + 2\left(\frac{2}{36}\right) + 3\left(\frac{2}{36}\right) + 4\left(\frac{3}{36}\right) + 5\left(\frac{2}{36}\right) + 6\left(\frac{4}{36}\right) + 8\left(\frac{2}{36}\right) + 9\left(\frac{1}{36}\right) +$$

$$10\left(\frac{2}{36}\right) + 12\left(\frac{4}{36}\right) + 15\left(\frac{2}{36}\right) + 16\left(\frac{1}{36}\right) + 18\left(\frac{2}{36}\right) + 20\left(\frac{2}{36}\right) + 24\left(\frac{2}{36}\right) +$$

$$25\left(\frac{1}{36}\right) + 30\left(\frac{2}{36}\right) + 36\left(\frac{1}{36}\right) = 12.25$$

LECCIÓN CONDENSADA

12.5 Permutaciones y probabilidad

En esta lección

- Aprenderás el **principio del conteo** para contar los resultados que implican una secuencia de opciones
- Resolverás unos problemas de probabilidad y de conteo que implican **permutaciones**
- Usarás la notación **factorial** para expresar el número de permutaciones de n objetos, tomados de r en r

Algunas situaciones de probabilidad implican un gran número de posibles resultados. En esta lección, aprenderás algunos maneras cortas para "contar" los resultados.

Investigación: Orden y ordenamiento

Intenta completar la investigación en tu libro por tu cuenta. Si te atoras, o si deseas verificar tus respuestas, lee los resultados siguientes.

Paso 1 Si $n = 1$ y $r = 1$, entonces existe un objeto, A, y una abertura que llenar. En este caso, sólo hay una cosa que puedes hacer: poner A en la abertura.

Si $n = 2$ y $r = 1$, entonces hay dos objetos, A y B, y una sola abertura. En este caso hay dos cosas que puedes hacer: poner A en la abertura o poner B en la abertura.

Si $n = 2$ y $r = 2$, entonces hay dos objetos, A y B, y dos aberturas a llenar. En este caso hay dos cosas que puedes hacer: poner A en la abertura 1 y B en la abertura 2, o poner B en la abertura 1 y A en la abertura 2. Puedes representar estas dos posibilidades como AB y BA.

A continuación se enumeran las posibilidades de todos los casos para $n = 3$. Puedes usar un método parecido de listado para hallar el número de posibilidades para $n = 4$ y $n = 5$.

$n = 3$ y $r = 1$: A, B, C (3 posibilidades)

$n = 3$ y $r = 2$: AB, AC, BA, BC, CA, CB (6 posibilidades)

$n = 3$ y $r = 3$: ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA (6 posibilidades)

He aquí la tabla completa:

		Número de objetos, n				
		$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$
Número de espacios, r	$r = 1$	1	2	3	4	5
	$r = 2$		2	6	12	20
	$r = 3$			6	24	60
	$r = 4$				24	120
	$r = 5$					120

Paso 2 Patrones posibles: los números en la primera fila son enteros consecutivos. En la segunda fila, los valores aumentan en números pares consecutivos (4, luego 6, luego 8). En la tercera fila, los números aumentan en múltiplos de 18. En cada columna, los resultados para $r = n$ y $r = n - 1$ son iguales. Esto es así porque hay una sola manera de colocar el último objeto.

Existe una manera corta para contar las posibilidades en la investigación. Por ejemplo, supón que $n = 4$ y $r = 3$. Entonces existen cuatro objetos y tres aberturas a llenar. Existen 4 opciones de objetos para llenar la primera abertura.

(continúa)

Después de llenar la primera abertura, existen 3 opciones para la segunda abertura. Después de llenar la segunda abertura, hay 2 opciones para la tercera. Entonces, el número de posibilidades es $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$. (Si tienes problemas en entender por qué debes multiplicar, lee el ejemplo sobre cómo elegir un atuendo en la página 695 de tu libro.) Esta manera corta, conocida como el **principio del conteo,** se establece en la página 695. Lee el Ejemplo A en tu libro, en el que se aplica el principio del conteo.

Cuando un problema de conteo implica ordenamientos de objetos, en el que cada objeto sólo se puede utilizar una vez (como en la investigación), los ordenamientos se llaman "ordenamientos sin reemplazo". El ordenamiento de todos o algunos de los objetos de un conjunto, sin reemplazo, se llama una **permutación.** La notación ${}_nP_r$ significa "el número de permutaciones de n objetos escogidos de r en r". Calculas ${}_nP_r$ multiplicando $n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$. El Ejemplo B en tu libro ilustra estas ideas. Lee ese ejemplo, y después intenta el ejemplo siguiente.

EJEMPLO

Theo trabaja como cuidador de perros. El día de hoy, debe pasear a Abby, Bruno, Coco, Denali, Emma, y Fargus.

a. ¿En cuántos ordenamientos puede pasear a los perros?

b. Theo decide escoger el orden al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que pasee primero a Abby y al último a Fargus?

▶ ***Solución***

a. Existen 6 opciones para el primer perro, 5 opciones para el segundo perro, 4 opciones para el tercer perro, y así sucesivamente. El número total de posibilidades es ${}_6P_6 = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$.

b. Primero cuenta cuántos ordenamientos tienen a Abby primero y a Fargus al último. Dibuja seis rayas para representar a los perros. Hay una posibilidad para la primera raya (Abby) y una posibilidad para la última raya (Fargus).

$\underline{1}\;\underline{\quad}\;\underline{\quad}\;\underline{\quad}\;\underline{\quad}\;\underline{1}$

Existen 4 opciones para la segunda raya, después 3 opciones para la tercera, 2 opciones para la cuarta y 1 opción para la quinta raya.

$\underline{1}\;\underline{4}\;\underline{3}\;\underline{2}\;\underline{1}\;\underline{1}$

Usando el principio del conteo, hay $1 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1$, ó 24 ordenamientos en los que Abby es primero y Fargus último. Por tanto, la probabilidad de que Theo pasee primero a Abby y a Fargus al último es $\frac{24}{720}$, ó $\frac{1}{30}$.

En la parte a del ejemplo anterior, puedes ver que ${}_6P_6$ es el producto de todos los números enteros desde 6 hasta 1. El producto de los enteros de n a 1 se llama el **factorial** n y se abrevia como $n!$. Por ejemplo, $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$. En general,

$${}_nP_n = n!$$

$${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Para conocer esto con más detalle, lee el resto de la lección en tu libro.

LECCIÓN CONDENSADA

12.6 Combinaciones y probabilidad

En esta lección

- Resolverás unos problemas de conteo y probabilidad que implican **combinaciones**
- Descubrirás cómo el número de combinaciones de n objetos, tomados de r en r, se relaciona con el número de permutaciones de n objetos tomados de r en r

Supón que 8 jugadores participan en un torneo de tenis. En la primera ronda, cada jugador debe jugar con cada uno de los demás jugadores una sola vez. ¿Cuántos partidos se jugarán en la primera ronda? Deberías considerar el uso del principio de conteo; hay 8 opciones para el primer jugador y 7 opciones para su oponente, lo cual da un total de $8 \cdot 7$, ó 56 posibles pares. Sin embargo, observa que, en este caso, el orden de los jugadores no importa. En otras palabras, el par Jugador A vs. Jugador B es lo mismo que Jugador B vs. Jugador A. Por tanto, el número total de partidos es en realidad $\frac{8 \cdot 7}{2}$, ó 28.

Cuando cuentas colecciones de objetos sin que importe el orden, estás contando **combinaciones.** En el ejemplo del torneo de tenis, encontraste el número de combinaciones de 8 personas tomadas de 2 en 2. Esto se escribe como ${}_8C_2$. Aunque hay ${}_8P_2 = 56$ permutaciones de 8 personas tomadas de 2 en 2, sólo existe la mitad de ese número de combinaciones:

$${}_8C_2 = \frac{{}_8P_2}{2} = \frac{56}{2} = 28$$

Lee el texto hasta el Ejemplo B en tu libro. Observa que la situación en el Ejemplo A es muy parecida a la situación anterior del torneo de tenis.

El Ejemplo B en tu libro implica encontrar el número de combinaciones de 4 personas tomadas de 3 en 3. Lee ese ejemplo atentamente, y después lee el ejemplo siguiente.

EJEMPLO Jason compró seis libros nuevos. Quiere llevar consigo cuatro de los libros en su viaje de vacaciones. ¿Cuántas combinaciones de cuatro libros puede formar?

▶ ***Solución*** Debido a que el orden no importa, deseas encontrar el número de combinaciones de 6 libros tomados de 4 en 4. Sin embargo, piensa primero sobre el número de permutaciones de 6 libros (llámalos Libros A a F) tomados de 4 en 4: ${}_6P_4 = 360$. Con este número se cuenta cada combinación de 4 libros 4!, ó 24 veces. Por ejemplo, ABCD, ABDC, ACBD, ACDB, ADBC, ADCB, BACD, BADC, BCAD, BCDA, BDAC, BDCA, CABD, CADB, CBAD, CBDA, CDAB, CDBA, DABC, DACB, DBAC, DBCA, DCAB, y DCBA se cuentan por separado porque son permutaciones diferentes. Sin embargo, estas 24 permutaciones representan una sola combinación. Como cada combinación se cuenta 24 veces, debes dividir el número de permutaciones entre 24 para obtener el número de combinaciones. Así pues,

$${}_6C_4 = \frac{{}_6P_4}{4!} = \frac{360}{24} = 15$$

Existen 15 combinaciones diferentes de cuatro libros que Jason puede escoger para su viaje.

(continúa)

Lección 12.6 • Combinaciones y probabilidad (continuación)

Lee el texto correspondiente al recuadro "Combinations" en la página 705 de tu libro. Para asegurarte de que entiendes las ideas, intenta resolver el problema en el Ejemplo C, antes de leer la solución.

Investigación: Ganar la lotería

Lee el Paso 1 de la investigación en tu libro. Considera qué sucedió cuando tu aula hizo la simulación del juego de Lotería 47. Es probable que todos tus compañeros quedaran sentados después de que se mencionaron solamente tres o cuatro números.

Paso 2 Para hallar la probabilidad de que cualquier conjunto de 6 números gane, primero encuentra el número de combinaciones posibles. (Observa que se trata de combinaciones, pues el orden no importa.) Hay 47 números posibles, de modo que el número de combinaciones posibles es

$$_{47}C_6 = \frac{47!}{6!(47-6)!} = 10737573$$

La probabilidad de que una combinación cualquiera gane es $\frac{1}{10737573}$, ó aproximadamente .0000000931.

Si es posible, completa la investigación usando los datos de la simulación de tu clase. Si no, utiliza las siguientes suposiciones: Hay seis grupos de 4 estudiantes en tu aula, en tu grupo se generaron un total de 100 combinaciones de seis números y hay 1000 estudiantes en tu escuela. Los resultados siguientes se basan en estas suposiciones.

Pasos 3–6 Tu grupo invirtió \$100, y tu clase invirtió \$600. Suponiendo que todas las 600 combinaciones son diferentes, la probabilidad de que alguien de tu aula gane es $\frac{600}{10737573}$, ó aproximadamente .0000559.

Suponiendo que cada persona en tu escuela generó 25 combinaciones, con un total de 25,000 combinaciones, la probabilidad de que alguien en la escuela gane es $\frac{25000}{10737573}$, ó aproximadamente .00233.

Paso 7 Si cada una de las 10,737,573 combinaciones se escribieran en una tarjeta de 1 pulgada de largo, y éstas se pusieran en línea una tras otra, entonces la línea de tarjetas mediría aproximadamente 169 millas de longitud (10737573 pulg = 894797.75 pies ≈ 169 mi).

Paso 8 Las respuestas variarán. Una respuesta sencilla es que la probabilidad de ganar la Lotería 47 ¡es la misma que la probabilidad de sacar tu nombre al azar de un sombrero que contenga 10,737,573 nombres diferentes (incluyendo el tuyo, por supuesto)!

LECCIÓN CONDENSADA 12.7

El Teorema del binomio y el triángulo de Pascal

En esta lección

- Aprenderás cómo el número de combinaciones se relaciona con el **triángulo de Pascal**
- Aprenderás cómo el número de combinaciones se relaciona con el **desarrollo binomial** (*binomial expansion*)
- Usarás los desarrollos binomiales para hallar las probabilidades en situaciones que implican dos resultados
- Usarás la información obtenida en una **muestra** para hacer predicciones sobre la **población**

Aquí se ven las primeras filas del triángulo de Pascal. El triángulo contiene muchos patrones diferentes, estudiados durante siglos. Por ejemplo, observa que cada número en el interior del triángulo es la suma de los dos números por encima de él. Tómate unos cuantos minutos para ver cuáles otros patrones puedes encontrar.

$$\begin{array}{ccccccccccc} &&&&&1&&&&& \\ &&&&1&&1&&&& \\ &&&1&&2&&1&&& \\ &&1&&3&&3&&1&& \\ &1&&4&&6&&4&&1& \\ 1&&5&&10&&10&&5&&1 \end{array}$$

En la Lección 12.6, estudiaste los números de combinaciones. Dichos números se encuentran en el triángulo de Pascal. Por ejemplo, los números 1, 5, 10, 10, 5, 1 en la sexta fila son los valores de ${}_5C_r$:

$${}_5C_0 = 1 \qquad {}_5C_1 = 5 \qquad {}_5C_2 = 10 \qquad {}_5C_3 = 10 \qquad {}_5C_4 = 5 \qquad {}_5C_5 = 1$$

En la investigación, explorarás por qué estos números de combinaciones aparecen en el triángulo de Pascal.

Investigación: El triángulo de Pascal y los números de combinaciones

Completa la investigación en tu libro, y después compara tus resultados con los siguientes.

Paso 1 ${}_5C_3 = 10$

Paso 2 Si es seguro que Leora está sentada a la mesa, entonces dos estudiantes más pueden sentarse a la mesa. Se escogen a los dos estudiantes que se sentarán entre cuatro estudiantes, de modo que el número de combinaciones posibles es ${}_4C_2 = 6$.

Paso 3 Si Leora queda excluida, entonces se deben escoger a tres estudiantes entre los cuatro restantes. El número de combinaciones posibles es ${}_4C_3 = 4$.

Paso 4 Si se deben escoger a cuatro estudiantes entre un grupo de cinco, entonces el número de combinaciones es ${}_5C_4 = 5$. Si es seguro que Leora está sentada a la mesa, entonces los otros tres estudiantes deben escogerse entre los cuatro estudiantes que quedan. El número de combinaciones es entonces ${}_4C_3 = 4$. Si Leora queda excluida, entonces los cuatro estudiantes deben escogerse entre los cuatro que quedan. El número de combinaciones es ${}_4C_4 = 1$.

Paso 5 ${}_5C_3 = {}_4C_2 + {}_4C_3$ y ${}_5C_4 = {}_4C_3 + {}_4C_4$. En general,

$${}_nC_r = {}_{n-1}C_{r-1} + {}_{n-1}C_r$$

Paso 6 En el triángulo de Pascal, cada entrada (excepto 1) es la suma de las dos entradas encima de ella. La r-ésima entrada de la fila $n + 1$ es ${}_nC_r$ y las dos entradas por encima de ella son ${}_{n-1}C_r$ y ${}_{n-1}C_{r-1}$. Por tanto, ${}_nC_r = {}_{n-1}C_{r-1} + {}_{n-1}C_r$, que es precisamente el patrón que encontraste en el Paso 5.

(continúa)

Lección 12.7 • El Teorema del binomio y el triángulo de Pascal (continuación)

El triángulo de Pascal también se relaciona con el desarrollo (*expansion*) de los binomios. Por ejemplo, el desarrollo de $(x + y)^3$ es $1x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + 1y^3$. Observa que los coeficientes del desarrollo son los números que aparecen en la cuarta fila del triángulo de Pascal. ¿Por qué los números del triángulo de Pascal son iguales a los coeficientes de un desarrollo binomial? Los números del triángulo de Pascal son valores de ${}_nC_r$, de modo que puedes replantear esta pregunta como, ¿Por qué los coeficientes de un desarrollo binomial son iguales a los valores de ${}_nC_r$? Para explorar la pregunta, lee el Ejemplo A en tu libro y el texto que le sigue inmediatamente. Después lee el planteamiento del Teorema del binomio en la página 712.

El Ejemplo B en tu libro muestra cómo puedes usar un desarrollo binomial para hallar las probabilidades de unos resultados que no son igualmente posibles. Lee este ejemplo, siguiéndolo con papel y lápiz, y después lee el ejemplo siguiente.

EJEMPLO A Se dobla una moneda de modo que la probabilidad de obtener cara en cualquier lanzamiento es .4. Supón que la moneda se lanza cinco veces. Encuentra la probabilidad de obtener 0, 1, 2, 3, 4, y 5 caras.

▶ ***Solución*** Sea $P(x)$ la probabilidad de obtener x caras en 5 lanzamientos. Si p es la probabilidad de obtener una cara en cualquiera de los lanzamientos y q es la probabilidad de *no* obtener una cara (es decir, de obtener una cruz), entonces $P(x)$ es el término ${}_5C_x p^x q^{5-x}$ del desarrollo de $(p + q)^5$. Específicamente,

$P(0) = {}_5C_0 p^0 q^5 = 1(.4^0)(.6^5) = .07776$ $\quad$ $P(1) = {}_5C_1 p^1 q^4 = 5(.4^1)(.6^4) = .2592$

$P(2) = {}_5C_2 p^2 q^3 = 10(.4^2)(.6^3) = .3456$ $\quad$ $P(3) = {}_5C_3 p^3 q^2 = 10(.4^3)(.6^2) = .2304$

$P(4) = {}_5C_4 p^4 q^1 = 5(.4^4)(.6^1) = .0768$ $\quad$ $P(5) = {}_5C_5 p^5 q^0 = 1(.4^5)(.6^0) = .01024$

El Ejemplo C en tu libro muestra cómo se utilizan las ideas de esta lección en el **muestreo** (*sampling*). Lee el texto en la página 713, y después lee el Ejemplo C. He aquí otro ejemplo.

EJEMPLO B Una compañía produce cuchufletas. Ayer, el gerente de control de calidad seleccionó una muestra aleatoria de 50 cuchufletas y encontró que 3 estaban defectuosas. ¿Cuál es la probabilidad de que una cuchufleta elegida al azar de las que se produjeron ayer esté defectuosa?

▶ ***Solución*** Una razón de $\frac{3}{50}$, ó .06, sería probable si la probabilidad de que una cuchufleta elegida al azar esté defectuosa es también .06. Pero esta razón podría producirse igualmente para otras probabilidades. Sea p la probabilidad desconocida de que una cuchufleta esté defectuosa. La probabilidad de que n cuchufletas de una muestra de 50 estén defectuosas es ${}_{50}C_n p^n q^{50-n}$. Si $n = 3$, el valor más probable de p es .06. Para hallar otros valores de p que den una probabilidad de tener 3 defectuosas, que es más alta que la probabilidad de tener 2 ó 4, necesitas resolver estas desigualdades: ${}_{50}C_3 p^3 q^{47} > {}_{50}C_2 p^2 q^{48}$ y ${}_{50}C_3 p^3 q^{47} > {}_{50}C_4 p^4 q^{46}$.

Resuelve estas desigualdades tú mismo. (Usa la solución del Ejemplo C en tu libro como guía.) Debes obtener $\frac{1}{17} < p < \frac{4}{51}$, ó $.05882 < p < .07843$.

Entonces, la probabilidad de que una cuchufleta elegida al azar esté defectuosa se encuentra entre 5.9% y 7.8%.